Análisis Funcional – Evaluación 1. Soluciones

Ejercicio 1. Sean $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ dos normas en un espacio vectorial X. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

a) Las dos normas son equivalentes.

b) La esfera unidad para cada una de las normas es un conjunto acotado para la otra norma.

c) La bola cerrada unidad para cada una de las normas es un conjunto acotado para la otra norma.

d) Las dos normas tienen los mismos conjuntos acotados.

e) Las dos normas tienen las mismas sucesiones de Cauchy.

f) Las dos normas tienen las mismas sucesiones convergentes

Demostración. $a) \Longrightarrow b)$. Sean $S_{\|.\|}$ y $S_{|||.|||}$ las esferas unidad para las normas $\|\,.\,\|$ y $|||\,.\,|||$ respectivamente. Por hipótesis existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leqslant M|||x|||$ para todo $x \in X$. Entonces, para $x \in S_{|||.|||}$, tenemos que $\|x\| \leqslant M$, lo que prueba que $S_{|||.|||}$ está acotada en $(X, \|\,.\,\|)$. Análogamente se prueba que $S_{\|.\|}$ está acotada en $(X, |||\,.\,|||)$.

$b) \Longrightarrow c)$. Sean $B_{\|.\|}$ y $B_{|||.|||}$ las bolas cerradas unidad para las normas $\|\,.\,\|$ y $|||\,.\,|||$ respectivamente. Por hipótesis, existe $\alpha > 0$ tal que $|||z||| \leqslant \alpha$ para todo $z \in S_{\|.\|}$. Sea $x \in B_{\|.\|}$, $x \neq 0$. Entonces $\frac{x}{\|x\|} \in S_{\|.\|}$, por lo que

$$\left|\left|\left| \frac{x}{\|x\|} \right|\right|\right| \leqslant \alpha \Longrightarrow |||x||| \leqslant \alpha\|x\| \leqslant \alpha$$

Lo que prueba que $B_{\|.\|}$ está acotado en $(X, |||\,.\,|||)$. Análogamente se prueba que $B_{|||.|||}$ está acotada en $(X, \|\,.\,\|)$.

$c) \Longrightarrow d)$. Sea A un conjunto acotado en $(X, |||\,.\,|||)$, esto es, existe $\beta > 0$ tal que $|||x||| \leqslant \beta$ para todo $x \in A$. Por hipótesis, existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leqslant M$ para todo $x \in B_{|||.|||}$. Tenemos que

$$x \in A \Longrightarrow \frac{x}{\beta} \in B_{|||.|||} \Longrightarrow \left\| \frac{x}{\beta} \right\| \leqslant M \Longrightarrow \|x\| \leqslant \beta M$$

Lo que prueba que A está acotado en $(X, \|\,.\,\|)$. Análogamente se prueba que todo conjunto acotado en $(X, \|\,.\,\|)$ está acotado en conjunto acotado en $(X, |||\,.\,|||)$.

$d) \Longrightarrow e)$. Por hipótesis existe $M > 0$ tal que para todo $x \in B_{\|.\|}$ se tiene que $|||x||| \leqslant M$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(X, \|\,.\,\|)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $p, q \geqslant n_0$ se verifica que $\|x_p - x_q\| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$. Entonces para todos $p, q \geqslant n_0$ tenemos que

$$\left\| \frac{M}{\varepsilon}(x_p - x_q) \right\| \leqslant 1 \Longrightarrow \left|\left|\left| \frac{M}{\varepsilon}(x_p - x_q) \right|\right|\right| \leqslant M \Longrightarrow |||x_p - x_q||| \leqslant \varepsilon$$

Lo que prueba que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy en $(X, |||\,.\,|||)$. Análogamente se prueba que toda sucesión de Cauchy en $(X, |||\,.\,|||)$ también es una sucesión de Cauchy en $(X, \|\,.\,\|)$.

$e) \Longrightarrow f)$. Sea $\{x_n\} \to x$ en $(X, \|\,.\,\|)$. Definamos $\{y_n\}$ por $y_{2n} = x_n$, $y_{2n-1} = x$. Es claro que $\{y_n\} \to x$ en $(X, \|\,.\,\|)$. Por tanto, $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $(X, \|\,.\,\|)$. Por hipótesis, dicha sucesión también es de Cauchy en $(X, |||\,.\,|||)$ y, como dicha sucesión tiene una parcial convergente, deducimos que $\{y_n\}$ es convergente en $(X, |||\,.\,|||)$ y, por tanto, $\{x_n\}$ también converge en $(X, |||\,.\,|||)$ por ser parcial de $\{y_n\}$. Análogamente se prueba que toda sucesión convergente en $(X, |||\,.\,|||)$ también es convergente en $(X, \|\,.\,\|)$.

$f) \Longrightarrow a)$. Probemos que existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leqslant M|||x|||$ para todo $x \in X$. En caso contrario, para todo $n \in \mathbb{N}$ existiría $x_n \in X$ tal que $\|x_n\| > n^2|||x_n|||$. Pero entonces la sucesión $\left\{ \dfrac{n x_n}{\|x_n\|} \right\}$ converge a cero en $(X, |||\,.\,|||)$ pero no está acotada en $(X, \|\,.\,\|)$ en contradicción con la hipótesis. Análogamente se prueba que existe $\alpha > 0$ tal que $|||x||| \leqslant \alpha\|x\|$ para todo $x \in X$. □

Este ejercicio puede hacerse de muchas formas. Una de ellas consiste en probar las implicaciones $a) \Longrightarrow d)$ y $b) \Longrightarrow a)$. Ambas inmediatas, y como es evidente que $d) \Longrightarrow c) \Longrightarrow b)$, tenemos así probada la equivalencia entre $a), b), c)$ y $d)$. Ahora se prueban las implicaciones $a) \Longrightarrow e)$ y $a) \Longrightarrow f)$, ambas inmediatas. Ya sólo queda probar alguna de las implicaciones $e) \Longrightarrow a)$ o $f) \Longrightarrow a)$ (y podemos sustituir $a)$ por $b), c)$ o $d)$). Éstas son las únicas que tienen algo que pensar.

Lo que es imposible de entender es que para probar la implicación $a) \Longrightarrow c)$ se pruebe (siempre con errores groseros en las acotaciones con las normas) que las bolas cerradas unidad son homeomorfas. ¿Qué tienen que ver los homeomorfismos con la acotación? Nada, absolutamente nada. Quienes hacen eso demuestran tener un gran despiste. Y suelen rematar la faena diciendo que $f)$ es un caso particular de $e)$. Pues no, $f)$ no es consecuencia inmediata de $e)$, hay que hacerlo.

Ejercicio 2. Sea A un subconjunto no vacío de un espacio normado X. Prueba que

$$A + B(0,1) = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, A) < 1\}.$$

¿Es cierto que $A + \overline{B}(0,1) = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, A) \leqslant 1\}$?

Demostración. Sea $x \in A + B(0,1)$, es decir $x = a + u$ con $a \in A$ y $u \in B(0,1)$. Entonces $\operatorname{dist}(x, A) \leqslant \|x - a\| = \|u\| < 1$, luego $\operatorname{dist}(x, A) < 1$. Hemos probado que $A + B(0,1) \subseteq \{x \in X : \operatorname{dist}(x, A) < 1\}$.

Supongamos ahora que $\operatorname{dist}(x, A) < 1$, puesto que $\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$, si $\operatorname{dist}(x, A) < 1$ deducimos, por la definición de extremo inferior, que 1 no es minorante del conjunto $\{\|x - a\| : a \in A\}$, es decir, existe $a \in A$ tal que $\|x - a\| < 1$. Pero entonces $x = a + (x - a) \in A + B(0,1)$. Hemos probado que $\{x \in X : \operatorname{dist}(x, A) < 1\} \subseteq A + B(0,1)$. Queda probada con ello la igualdad del enunciado.

La igualdad $A + \overline{B}(0,1) = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, A) \leqslant 1\}$ no es cierta en general. Por ejemplo, si A es un conjunto abierto, entonces $A + \overline{B}(0,1)$ también es un conjunto abierto:

$$A + \overline{B}(0,1) = \bigcup_{\|x\| \leqslant 1} \big(x + A\big)$$

Mientras que $\{x \in X : \operatorname{dist}(x, A) \leqslant 1\}$ es cerrado. Y los espacios normados son espacios topológicos arco-conexos y, por tanto, conexos y en ellos no puede haber subconjuntos propios que sean abiertos y cerrados. □